

| | |
|--|-----------|
| PARTEA 1. Complemente de matematică | 1 |
| 1.1. Curbe și suprafețe exprimate analitic | 2 |
| - Ecuțiile parametrice ale unei curbe | 2 |
| - Tangenta la o curbă | 3 |
| - Normala unei curbe plane | 3 |
| - Curbura unei curbe plane | 4 |
| - Planuri osculatoare la curbă | 5 |
| - Lungimea arcului de curbă | 5 |
| - Curbura și torsiunea unei curbe | 6 |
| - Elemente de calcul vectorial | 6 |
| - Ecuțiile parametrice ale unei suprafețe | 7 |
| - Tangenta la o curbă coordonată | 7 |
| - Normala la o suprafață | 8 |
| - Curburile principale | 8 |
| - Curbe și suprafețe echidistante | 10 |
| 1.2. Generarea curbelor și suprafețelor | 11 |
| - Transformări de coordonate | 11 |
| - Transformări de vectori | 13 |
| - Transformări multiple | 13 |
| - Curbe de înfășurare reciprocă | 13 |
| - Suprafețe de înfășurare reciprocă | 16 |
| - Înfășurătoare, evoluate, centroide | 17 |
| - Scheme de generare | 19 |
| 1.3. Aproximarea curbelor și suprafețelor | 21 |
| - Arc spline cubic | 21 |
| - Curbă spline cubică | 23 |
| - Element de suprafață spline | 26 |
| - Suprafață spline bicubică | 30 |
| - Suprafață spline biliniară | 32 |
| - Calculul local al suprafețelor spline | 33 |
| - Polinomul de interpolare a lui Newton | 36 |
| - Polinomul de interpolare a lui Newton aplicat curbelor | 37 |
| - Polinomul de interpolare a lui Newton aplicat suprafețelor | 39 |
| - Derivarea aproximativă | 41 |

| | |
|---|-----------|
| 2.1. Fundamentele AutoLISP | 46 |
| - Introducere | 46 |
| - Expresii simbolice | 46 |
| - Atomii, listele și cazul special a lui NIL | 48 |
| - Evaluarea atomilor și listelor | 49 |
| - Funcții aritmetice | 51 |
| - Atribuirea | 52 |
| - Tipuri de date numerice | 53 |
| - Puncte AutoCAD și liste AutoLISP | 54 |
| - Extragerea elementelor dintr-o listă | 55 |
| - AutoLISP și comenzi AutoCAD | 56 |
| 2.2. Definirea funcțiilor externe AutoLISP | 59 |
| - Definirea unei noi funcții AutoLISP | 59 |
| - Utilizarea unui editor de texte la scrierea programelor | 60 |
| - Încărcarea în AutoCAD a unui program AutoLISP | 62 |
| - Reguli de editare a unui program AutoLISP | 63 |
| - Sintaxa funcției <code>defun</code> | 64 |
| - Expresiile test și cele condiționale | 65 |
| 2.3. Definirea de noi comenzi AutoCAD | 68 |
| - Comanda de desenare a unui dreptunghi | 68 |
| - Cereri de date din AutoLISP | 69 |
| - Perfecționarea programului AutoLISP | 71 |
| - Comanda de desenare a unui semicerc | 72 |
| - Tabloul funcțiilor <code>GET...</code> mai importante | 73 |
| 2.4. Reprezentarea unor curbe rezultate din calcul | 75 |
| - Reprezentarea evolventei | 75 |
| - Mărirea vitezei de reprezentare a curbei | 77 |
| - Reprezentarea unei elice cilindrice | 79 |
| - Funcția <code>cond</code> și despre cicluri | 81 |
| 2.5. Accesul la baza de date AutoCAD | 84 |
| - Nume de entitate | 84 |
| - Caracteristicile unei entități | 85 |
| - Liste asociate și liste cu punct | 86 |
| - Contur orientat unei entități | 87 |
| - Funcția de verificare a tipului entității selectate | 89 |
| - O funcție utilă de transformare de coordonate | 90 |

| | |
|--|------------|
| 2.6. Șirurile, citirea și tipărirea datelor | 93 |
| - Funcții de lucru cu șiruri | 93 |
| - Caractere de control | 94 |
| - Funcții de tipărire | 94 |
| - Deschiderea unui fișier pentru citire/scriere | 96 |
| - Exemplu de scriere și citire | 98 |
| - Tratarea erorilor | 100 |
| 2.7. Accesul la polilini | 102 |
| - Structura unei polilinii | 102 |
| - Procesarea elementelor unei polilinii | 103 |
| - Analiza informației de la codul 42 (bulge) | 106 |
| - Scrierea punctelor într-un fișier | 107 |
| 2.8. Curbe și suprafețe în AutoCAD | 109 |
| - Tipuri de suprafețe AutoCAD | 109 |
| - Reprezentarea unei suprafețe elicoidale | 110 |
| - Reprezentarea unei curbe spline | 113 |

| | |
|----------------------------|------------|
| PARTEA 3. Aplicații | 115 |
|----------------------------|------------|

| | |
|--|-----|
| 3.1. Cercul | 116 |
| 3.2. Elipsa | 117 |
| 3.3. Elicea cilindrică | 119 |
| 3.4. Proiectarea unui șablon neted | 122 |
| 3.5. Suprafața elicoidală cilindrică | 127 |
| 3.6. Transportorul melcat | 129 |
| 3.7. Calculul de intersecție a două conducte | 132 |
| 3.8. Generarea cicloidei și evolventei | 136 |
| 3.9. Calculul unui dispozitiv de centrare pe strung, tip Forkardt® | 139 |
| 3.10. Calculul unui dispozitiv de fixare cu camă, tip Carrlane® | 142 |
| 3.11. Limitele înfășurării practice | 146 |
| 3.12. Un calcul de înfășurare de suprafețe | 149 |
| 3.13. Determinarea profilului dintelui unei roți dințate | 152 |
| 3.14. Calculul unei foarfeci cu roți dințate necirculare, tip Fiskars® | 156 |
| 3.15. Profilarea șuruburilor de la o pompă | 162 |
| 3.16. O proprietate a suprafețelor elicoidale cilindrice | 166 |
| 3.17. Calculul de prelucrare a unui melc ZK1 generalizat | 168 |

| | |
|---------------------|------------|
| Bibliografie | 176 |
|---------------------|------------|

| | |
|------------------------------------|------------|
| Breviar de funcții AutoLISP | 177 |
|------------------------------------|------------|

PARTEA 1. Complemente de matematică

Această parte instrumentează matematic reprezentarea și calculul curbelor și suprafețelor. Sunt indicate *ecuațiile parametrice* ale curbelor și suprafețelor precum și relațiile de calcul ale unor caracteristici de bază precum: tangenta, normala, curbura, torsiunea, etc. Noțiunile prezentate vor fi reluate și fundamentate prin exemple în partea a treia a manualului. Noțiunile matematice introduse funcționează în punctele regulate ale unei curbe respectiv suprafețe generale și sunt valabile atunci când formulele au sens.

Curbe și suprafețe tehnice pot fi obținute pe baza unor scheme de generare bazate pe mișcări relative simple, care au corespondență în practica prelucrărilor. Corpurilor în mișcare relativă li se asociază sisteme de coordonate. În general se pleacă de la cunoașterea într-un prim sistem a poziției unui punct sau ecuațiile parametrice ale unor curbe/suprafețe, numite *generatoare*. Prin mișcarea relativă cunoscută a celor două sisteme, punctul, curba sau suprafața dată, generează o curbă sau o suprafață, numită *înfășurătoare*, ale cărei ecuații se caută.

Se prezintă în cele din urmă aproximarea curbelor și suprafețelor printr-un calcul care permite înlocuirea unei curbe/suprafețe reale, cunoscută discret prin puncte, cu o curbă/suprafață de interpolare. Interpolarea permite calculul aproximativ al unor mărimi utile în procesul de proiectare-fabricare al curbei/suprafeței reale: tangente, normale, curburi etc. Omagiind nume importante ale domeniului sau sugerând aparatul matematic ce le descrie, se cunosc o serie de metode de interpolare: Coons, Bezier, B-splines, NURB, Newton etc.

Cuprins:

| | Pag. |
|--|------|
| 1.1. Curbe și suprafețe exprimate analitic | 2 |
| 1.2. Generarea curbelor și suprafețelor | 11 |
| 1.3. Aproximarea curbelor și suprafețelor | 21 |

1.1. Curbe și suprafețe exprimate analitic

Acest capitol instrumentează matematic reprezentarea și calculul în formă parametrică a curbilor și suprafețelor. Sunt indicate ecuațiile parametrice ale curbilor și suprafețelor precum și relațiile de calcul ale unor caracteristici de bază precum: tangenta, normala, curbura, torsiunea, etc. Noțiunile prezentate vor fi reluate și fundamentate prin exemple în cadrul aplicațiilor. Noțiunile matematice introduse funcționează în punctele regulate ale unei curbe respectiv suprafețe generale și sunt valabile atunci când formulele au sens.

Ecuțiile parametrice ale unei curbe

Tehnica apelează frecvent la reprezentarea vectorială sau parametrică a curbilor. Fie astfel o curbă în spațiu (C) și un sistem de referință *ortogonal drept* $OXYZ$, având versorii axelor notați \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} . Acestui sistem i se spune *ortogonal* pentru că axele sale sunt perpendiculare între ele, și *drept* pentru că respectă regula mâinii drepte - în sensul că pe versorii \mathbf{i} , \mathbf{j} și \mathbf{k} se pot aranja degetul mare, respectiv arătător și mijlociu al mâinii drepte (figura 1.1).

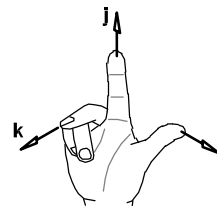
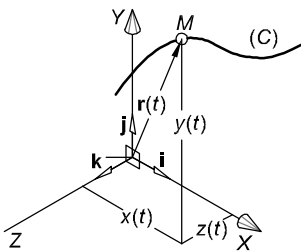


Figura 1.1. O curbă raportată la un sistem ortogonal drept; regula mâinii drepte.

Ecuția vectorială a curbei se scrie în forma [Enciclopedie_1980, pag. 704]:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t) \cdot \mathbf{i} + y(t) \cdot \mathbf{j} + z(t) \cdot \mathbf{k} \quad (1.1)$$

în care t se numește *parametrul curbei*. Această ecuație apare în forma unui vector de poziție cu punctul de aplicație în originea sistemului de coordonate, iar vârful într-un punct curent pe curbă. Curba astfel reprezentată are un *sens*: sensul de deplasare pe curbă a punctului M , atunci când parametrul t crește (figura 1.2).

O exprimare echivalentă relației (1.1), este cea numită *parametrică*, sub forma unui sistem de trei ecuații scalare:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad (1.2)$$

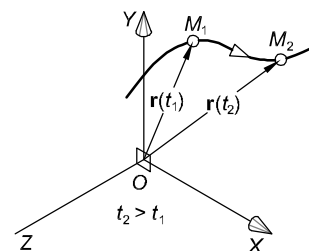


Figura 1.2. Definirea noțiunii de SENS pe o curbă în spațiu.

Pentru curbele plane sistemul se reduce la două ecuații scalare:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (1.3)$$

Tangenta la o curbă

Prin derivarea relației vectoriale (1.1) se obține un nou vector, care are calitatea de a fi *tangent* la curbă în punctul curent M (figura 1.3):

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}'(t) = x'(t) \cdot \mathbf{i} + y'(t) \cdot \mathbf{j} + z'(t) \cdot \mathbf{k} \quad (1.4)$$

în care s-au folosit notațiile:

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{dx(t)}{dt} \\ y'(t) = \frac{dy(t)}{dt} \\ z'(t) = \frac{dz(t)}{dt} \end{cases} \quad (1.5)$$

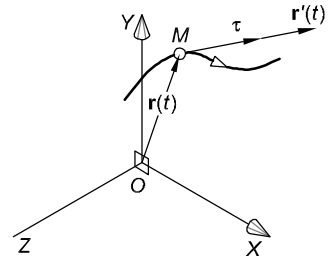


Figura 1.3. Vector tangent într-un punct la o curbă.

Într-un punct al unei curbe cu derivata continuă poate fi dus un singur vector tangent, iar sensul acestui vector este identic cu sensul curbei. Notând cu $\boldsymbol{\tau}$ versorul vectorului tangent, proiecțiile sale vor fi date de relațiile cunoscute:

$$\tau_x = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}; \tau_y = \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}; \tau_z = \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \quad (1.6)$$

Normala unei curbe plane

Pentru o curbă în spațiu se poate vorbi despre un singur *plan normal* la curbă într-un punct și de o infinitate de normale. Pentru o curbă plană există într-un punct o singură direcție *normală* (N). Pe această direcție ne vom referi la versorul normal \mathbf{v} , obținut prin rotirea cu 90° în sens trigonometric a versorului tangent $\boldsymbol{\tau}$. Se va imagina în acest sens răsturnarea unui dreptunghi în jurul colțului M , relațiile de calcul ale proiecțiilor versorului normalei pe baza versorului tangentei devenind evidente (figura 1.4):

$$\begin{cases} v_x = -\tau_y \\ v_y = \tau_x \end{cases} \quad (1.7)$$

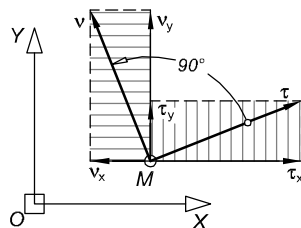
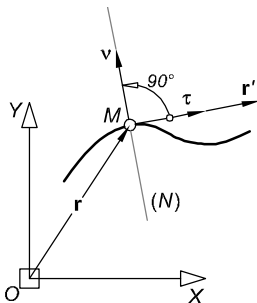


Figura 1.4. Determinarea normalei la o curbă plană, pe baza proiecțiilor tangentei.

Curbura unei curbe plane

Măsura în care se curbează o curbă plană este dată de noțiunile de *curbură* κ , sau *rază de curbură* ρ , legate prin relația:

$$\rho = \frac{1}{|\kappa|} \quad (1.8)$$

Relația (1.8) sugerează curbura drept o mărime susceptibilă de a fi pozitivă sau negativă, iar raza de curbură drept o mărime întotdeauna pozitivă. Pentru o curbă plană definită parametric, relația analitică de calcul a curburii este [Enciclopedie_1980, pag. 534]:

$$\kappa = \frac{x' \cdot y'' - x'' \cdot y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \quad (1.9)$$

în care x', y', x'', y'' sunt derivatele de ordinul unu și doi în raport cu t a funcțiilor (1.3).

Semnul curburii este strâns legat de sensul de parcurs al unei curbe; astfel, asociind o curbă plană cu o șosea, iar punctul curent M cu un automobil ce se deplasează pe șosea în sensul asociat curbei, semnul curburii indică un viraj spre stânga (+) sau dreapta (-), iar modulul său indică cât de strâns este virajul care urmează (figura 1.5). Viraje “strânse” înseamnă trecerea prin puncte cu curbură mare și rază de curbură mică.

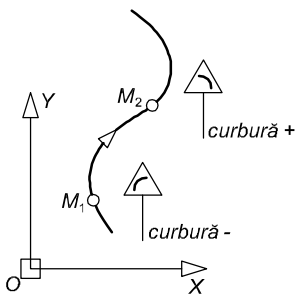


Figura 1.5. Semnul curburii interpretat ca sens al unui viraj pentru un mobil în mișcare.

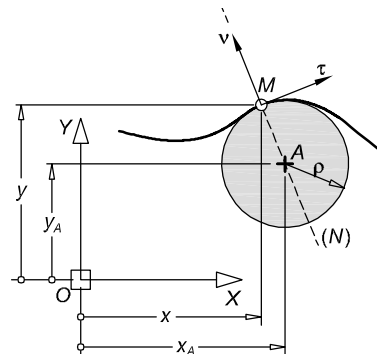


Figura 1.6. Centrul de curbură al unei curbe plane, într-un punct curent M .

În particular, în toate punctele sale o dreaptă are raza de curbură infinită și curbura egală cu zero, iar raza de curbură a unui cerc este o constantă egală cu raza cercului. În general, în diferite puncte ale unei curbe, curburile/razele de curbură sunt diferite. În jurul unui punct alura curbei poate fi aproximată cu un arc de cerc care aparține unui cerc de centru A (figura 1.6), definit prin punctul dat și două puncte învecinate, apropiate. Alegând puncte infinit apropiate, raza cercului de aproximare devine egală cu raza de curbură ρ , iar centrul cercului se numește *centru de curbură*, ale cărui coordonate se calculează cu ajutorul curburii κ și proiecțiilor versorului normalei \mathbf{v} , pe baza relației:

$$\begin{cases} x_A = x + \frac{1}{\kappa} \cdot v_x \\ y_A = y + \frac{1}{\kappa} \cdot v_y \end{cases} \quad (1.10)$$

Planuri osculatoare la curbă

Fie un punct P_0 al unei curbe în spațiu (C) și două puncte P_1 și P_2 alese pe curbă de o parte și alta a punctului P_0 . Prin cele două puncte P_1 și P_2 ducem o secantă și facem ca aceste puncte să tindă spre P_0 – atunci limita către care tinde secanta va fi *tangenta* în P_0 la (C). Pe direcția acestei tangente se află vectorul \mathbf{r}' ale cărui proiecții sunt date de relația (1.5). Existența tangentei este asigurată în punctele zise regulate ale unei curbe; punctele care nu sunt *regulate* se numesc *singulare*, iar proprietățile lor trebuie discutate separat [Enciclopedie_1980, pag. 705].

Planul perpendicular în P_0 pe tangenta se numește *plan normal* al lui (C) în P_0 (plan notat cu $[N]$ în figura 1.7a). Presupunem că curba (C) nu este o dreaptă, prin urmare punctele P_0 , P_1 și P_2 alese mai sus nu sunt coliniare. Trei puncte necoliniare determină un plan. Când punctele P_1 și P_2 tind spre P_0 , planul celor trei puncte va tinde spre o poziție limită numită *plan osculator* $[T]$ la curba (C) în punctul P_0 . Planul perpendicular pe planul normal și pe planul osculator se numește *plan rectificant* în P_0 (notat cu $[R]$ în figura 1.7b).

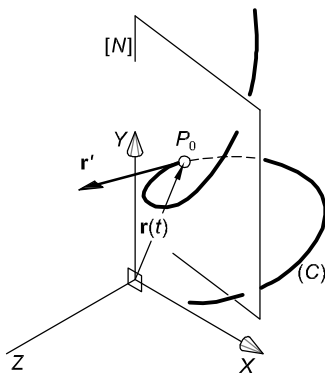


Figura 1.7a. Planul normal la o curbă în spațiu.

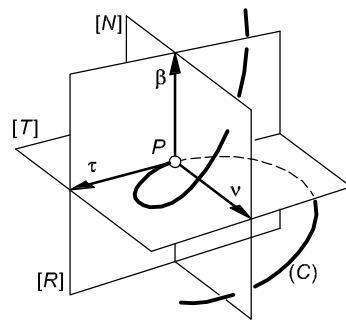


Figura 1.7b. Triedrul osculator al curbei.

Fiecare dreaptă care se află în planul normal și trece prin P_0 este *normală* lui (C) în P_0 . Normala care se află în planul osculator $[T]$ se numește *normala principală* a lui (C) în punctul P_0 iar cea care se află în planul rectificant se numește *binormală*. Vectorii directori ai celor două normale astfel definite sunt:

- $(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \times \mathbf{r}'$, pentru normala principală
- $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''$, pentru binormală

Dacă pentru fiecare punct al curbei (C) ducem trei vectori $\boldsymbol{\tau}$, \mathbf{v} și $\boldsymbol{\beta}$ de lungime unitară în direcția tangentei, normalei principale și binormalei, aceștia vor forma un triedru ortonormat care se numește *triedrul mobil osculator al curbei*, sau *triedrul lui Frenet* (figura 1.7b).

Lungimea arcului de curbă

O curbă poate fi trasată aproximativ printr-o linie poligonală compusă din segmente de dreaptă adiacente. Lungimea unei astfel de linii poligonale este egală cu suma segmentelor $\Delta \mathbf{r}$. Suma acestor segmente aproximează lungimea reală a curbei. Pentru un segment de curbă care are reprezentarea parametrică (1.2), cu parametrul t din intervalul $t_0 \leq t \leq t_1$, lungimea arcului de curbă corespunzător va fi dată de integrala [Enciclopedie_1980, pag. 706]:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} |\mathbf{r}'| dt \quad (1.11a)$$

unde $|\mathbf{r}'|$ este lungimea vectorului \mathbf{r}' ale cărei proiecții sunt date de relația (1.5).

Dacă dorim exprimarea lungimii arcului ca funcție de parametrul t și ca măsură a lungimii curbei între punctul care are parametrul 0 și punctul corespunzător unui t oarecare, atunci integrala se va scrie de forma:

$$l = \int_0^t |\mathbf{r}'| dt \quad (1.11b)$$

Curbură și torsiunea unei curbe

În evoluția lor generală, curbele în spațiu se curbeză și se torsiunează (răsucesc). Arcul de cerc este evident o curbă plană, de curbură constantă. Prin răsucirea arcului de cerc cu o torsiune constantă, acesta devine curbă în spațiu, de forma unei elice. În cazul general, o curbă în spațiu prezintă *curbură* și *torsiune* variabilă în diferite puncte ale sale. Fie ecuația vectorială a curbei și derivatele sale de ordinul 1, 2 și 3 în raport cu parametrul t , notate astfel:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}(t) = x(t) \cdot \mathbf{i} + y(t) \cdot \mathbf{j} + z(t) \cdot \mathbf{k} \\ \mathbf{r}' &= \mathbf{r}'(t) = x'(t) \cdot \mathbf{i} + y'(t) \cdot \mathbf{j} + z'(t) \cdot \mathbf{k} \\ \mathbf{r}'' &= \mathbf{r}''(t) = x''(t) \cdot \mathbf{i} + y''(t) \cdot \mathbf{j} + z''(t) \cdot \mathbf{k} \\ \mathbf{r}''' &= \mathbf{r}'''(t) = x'''(t) \cdot \mathbf{i} + y'''(t) \cdot \mathbf{j} + z'''(t) \cdot \mathbf{k} \end{aligned}$$

Cu aceste notații, curbură și torsiunea sunt date de relațiile generale [Ionescu_1984, pag. 142-143]:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3} \quad (1.12)$$

$$\frac{1}{T} = \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2} \quad (1.13)$$

În relația curburii, numărătorul este dat de modulul unui produs vectorial, iar numitorul de puterea a treia a modulului vectorului \mathbf{r}' . În relația torsiunii, numărătorul este dat de produsul mixt a trei vectori, iar numitorul de pătratul modulului unui produs vectorial.

Elemente de calcul vectorial

Reamintim câteva relații utile aparținând calculului vectorial. Pentru doi vectori \mathbf{a} și \mathbf{b} dați prin proiecții, *produsul vectorial* este un vector \mathbf{c} ale cărei proiecții sunt:

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \mathbf{a} \times \mathbf{b} \\ c_x &= a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ c_y &= a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z \\ c_z &= a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x \end{aligned} \quad (1.14)$$