Cuprins

PARTEA 1. Complemente de matematică

Această parte instrumentează matematic reprezentarea şi calculul curbelor şi suprafeţelor. Sunt indicate *ecuaţiile parametrice* ale curbelor şi suprafeţelor precum şi relaţiile de calcul ale unor caracteristici de bază precum: tangenta, normala, curbura, torsiunea, etc. Noţiunile prezentate vor fi reluate şi fundamentate prin exemple în partea a treia a manualului. Noţiunile matematice introduse funcţionează în punctele regulate ale unei curbe respectiv suprafeţe generale şi sunt valabile atunci când formulele au sens.

Curbe şi suprafeţe tehnice pot fi obţinute pe baza unor scheme de generare bazate pe mişcări relative simple, care au corespondenţă în practica prelucrărilor. Corpurilor în mişcare relativă li se asociază sisteme de coordonate. În general se pleacă de la cunoaşterea într-un prim sistem a poziţiei unui punct sau ecuaţiile parametrice ale unor curbe/suprafeţe, numite *generatoare*. Prin mişcarea relativă cunoscută a celor două sisteme, punctul, curba sau suprafaţa dată, generează o curbă sau o suprafaţă, numită *înfăşurătoare*, ale cărei ecuaţii se caută.

Se prezintă în cele din urmă aproximarea curbelor şi suprafeţelor printr-un calcul care permite înlocuirea unei curbe/suprafeţe reale, cunoscută discret prin puncte, cu o curbă/suprafaţă de interpolare. Interpolarea permite calculul aproximativ al unor mărimi utile în procesul de proiectare-fabricare al curbei/suprafeţei reale: tangente, normale, curburi etc. Omagiind nume importante ale domeniului sau sugerând aparatul matematic ce le descrie, se cunosc o serie de metode de interpolare: Coons, Bezier, B-splines, NURB, Newton etc.

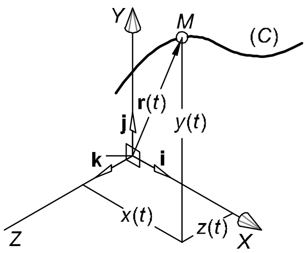
Cuprins:

1.1. Curbe şi suprafeţe exprimate analitic

Acest capitol instrumentează matematic reprezentarea şi calculul în formă parametrică a curbelor şi suprafeţelor. Sunt indicate ecuaţiile parametrice ale curbelor şi suprafeţelor precum şi relaţiile de calcul ale unor caracteristici de bază precum: tangenta, normala, curbura, torsiunea, etc. Noţiunile prezentate vor fi reluate şi fundamentate prin exemple în cadrul aplicaţiilor. Noţiunile matematice introduse funcţionează în punctele regulate ale unei curbe respectiv suprafeţe generale şi sunt valabile atunci când formulele au sens.

Ecuaţiile parametrice ale unei curbe

Tehnica apelează frecvent la reprezentarea vectorială sau parametrică a curbelor. Fie astfel o curbă în spaţiu (C) şi un sistem de referinţă *ortogonal drept OXYZ*, având versorii axelor notaţi **i**, **j**, **k**. Acestui sistem i se spune ortogonal pentru că axele sale sunt perpendiculare între ele, şi drept pentru că respectă regula mâinii drepte - în sensul că pe versorii **i**, **j** şi **k** se pot aranja degetul mare, respectiv arătător şi mijlociu al mâinii drepte (figura 1.1).



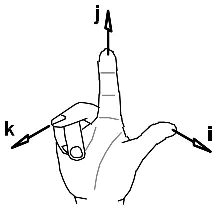


Figura 1.1. O curbă raportată la un sistem ortogonal drept; regula mâinii drepte.

Ecuaţia vectorială a curbei se scrie în forma [Enciclopedie_1980, pag. 704]:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\cdot\mathbf{i} + y(t)\cdot\mathbf{j} + z(t)\cdot\mathbf{k} \tag{1.1}$$

în care t se numeşte *parametrul curbei*. Această ecuaţie apare în forma unui vector de poziţie cu punctul de aplicaţie în originea sistemului de coordonate, iar vârful într-un punct curent pe curbă. Curba astfel reprezentată are un *sens*: sensul de deplasare pe curbă a punctului M, atunci când parametrul t creşte (figura 1.2).

O exprimare echivalentă relaţiei (1.1), este cea numită *parametrică*, sub forma unui sistem de trei ecuaţii scalare:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \tag{1.2}$$

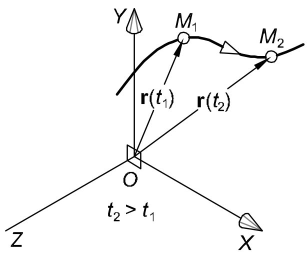


Figura 1.2. Definirea noţiunii de SENS pe o curbă în spaţiu.

Pentru curbele plane sistemul se reduce la două ecuaţii scalare:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \tag{1.3}$$

Tangenta la o curbă

Prin derivarea relaţiei vectoriale (1.1) se obţine un nou vector, care are calitatea de a fi *tangent* la curbă în punctul curent *M* (figura 1.3):

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}'(t) = x'(t)\cdot\mathbf{i} + y'(t)\cdot\mathbf{j} + z'(t)\cdot\mathbf{k} \tag{1.4}$$

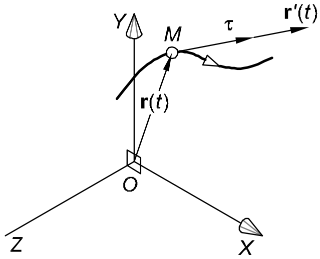


Figura 1.3. Vector tangent într-un punct la o curbă.

în care s-au folosit notaţiile:

$$\begin{cases} x'(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} \\ y'(t) = \dfrac{dy(t)}{dt} \\ z'(t) = \dfrac{dz(t)}{dt} \end{cases} \tag{1.5}$$

Într-un punct al unei curbe cu derivata continuă poate fi dus un singur vector tangent, iar sensul acestui vector este identic cu sensul curbei. Notând cu $\boldsymbol{\tau}$ versorul vectorului tangent, proiecţiile sale vor fi date de relaţiile cunoscute:

$$\tau_x = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}; \tau_y = \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}; \tau_z = \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \tag{1.6}$$

Normala unei curbe plane

Pentru o curbă în spaţiu se poate vorbi despre un singur *plan normal* la curbă într-un punct şi de o infinitate de normale. Pentru o curbă plană există într-un punct o singură direcţie *normală* (*N*). Pe această direcţie ne vom referi la versorul normal $\boldsymbol{\nu}$, obţinut prin rotirea cu 90° în sens trigonometric a versorului tangent $\boldsymbol{\tau}$. Se va imagina în acest sens răsturnarea unui dreptunghi în jurul colţului *M*, relaţiile de calcul ale proiecţiilor versorului normalei pe baza versorului tangentei devenind evidente (figura 1.4):

$$\begin{cases} \nu_x = -\tau_y \\ \nu_y = \tau_x \end{cases} \tag{1.7}$$

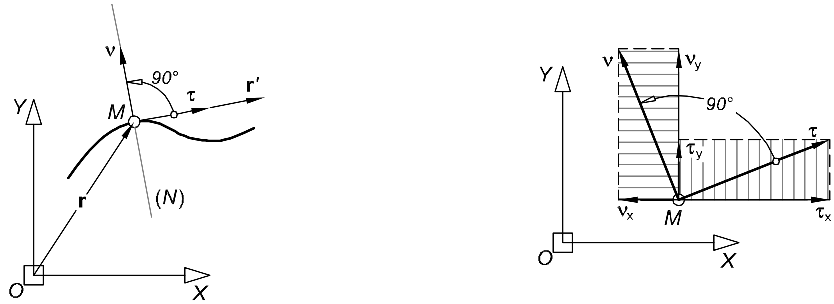


Figura 1.4. Determinarea normalei la o curbă plană, pe baza proiecţiilor tangentei.

Curbura unei curbe plane

Măsura în care se curbează o curbă plană este dată de noţiunile de *curbură* κ, sau *rază de curbură* ρ, legate prin relaţia:

$$\rho = \frac{1}{|\kappa|} \tag{1.8}$$

Relaţia (1.8) sugerează curbura drept o mărime susceptibilă de a fi pozitivă sau negativă, iar raza de curbură drept o mărime întotdeauna pozitivă. Pentru o curbă plană definită parametric, relaţia analitică de calcul a curburii este [Enciclopedie_1980, pag. 534]:

$$\kappa = \frac{x' \cdot y'' - x'' \cdot y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \tag{1.9}$$

în care x', y', x'', y'' sunt derivatele de ordinul unu şi doi în raport cu *t* a funcţiilor (1.3).

Semnul curburii este strâns legat de sensul de parcurs al unei curbe; astfel, asociind o curbă plană cu o şosea, iar punctul curent *M* cu un automobil ce se deplasează pe şosea în sensul asociat curbei, semnul curburii indică un viraj spre stânga (+) sau dreapta (−), iar modulul său indică cât de strâns este virajul care urmează (figura 1.5). Viraje "strânse" înseamnă trecerea prin puncte cu curbură mare şi rază de curbură mică.

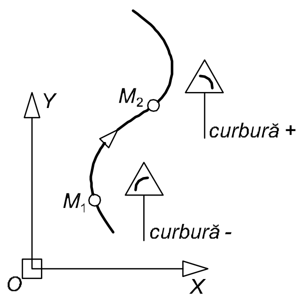


Figura 1.5. Semnul curburii interpretat ca sens al unui viraj pentru un mobil în mişcare.

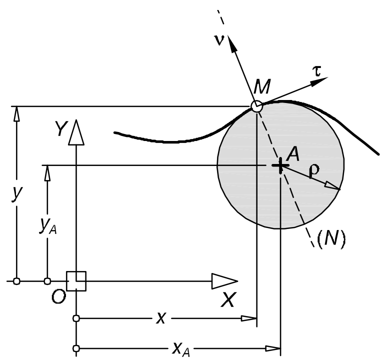


Figura 1.6. Centrul de curbură al unei curbe plane, într-un punct curent *M*.

În particular, în toate punctele sale o dreaptă are raza de curbură infinită şi curbura egală cu zero, iar raza de curbură a unui cerc este o constantă egală cu raza cercului. În general, în diferite puncte ale unei curbe, curburile/razele de curbură sunt diferite. În jurul unui punct alura curbei poate fi aproximată cu un arc de cerc care aparţine unui cerc de centru *A* (figura 1.6), definit prin punctul dat şi două puncte învecinate, apropiate. Alegând puncte infinit apropiate, raza cercului de aproximare devine egală cu raza de curbură ρ, iar centrul cercului se numeşte *centru de curbură*, ale cărui coordonate se calculează cu ajutorul curburii κ şi proiecţiilor versorului normalei **ν**, pe baza relaţiei:

$$\begin{cases} x_A = x + \dfrac{1}{\kappa} \cdot \nu_x \\ y_A = y + \dfrac{1}{\kappa} \cdot \nu_y \end{cases} \tag{1.10}$$

Planuri osculatoare la curbă

Fie un punct P_0 al unei curbe în spaţiu (C) şi două puncte P_1 şi P_2 alese pe curbă de o parte şi alta a punctului P_0. Prin cele două puncte P_1 şi P_2 ducem o secantă şi facem ca aceste puncte să tindă spre P_0 – atunci limita către care tinde secanta va fi *tangenta* în P_0 la (C). Pe direcţia acestei tangente se află vectorul $\mathbf{r}'$ ale cărui proiecţii sunt date de relaţia (1.5). Existenţa tangentei este asigurată în punctele zise regulate ale unei curbe; punctele care nu sunt *regulate* se numesc *singulare*, iar proprietăţile lor trebuie discutate separat [Enciclopedie_1980, pag. 705].

Planul perpendicular în P_0 pe tangentă se numeşte *plan normal* al lui (C) în P_0 (plan notat cu [N] în figura 1.7a). Presupunem că curba (C) nu este o dreaptă, prin urmare punctele P_0, P_1 şi P_2 alese mai sus nu sunt coliniare. Trei puncte necoliniare determină un plan. Când punctele P_1 şi P_2 tind spre P_0, planul celor trei puncte va tinde spre o poziţie limită numită *plan osculator* [T] la curba (C) în punctul P_0. Planul perpendicular pe planul normal şi pe planul osculator se numeşte *plan rectificant* în P_0 (notat cu [R] în figura 1.7b).

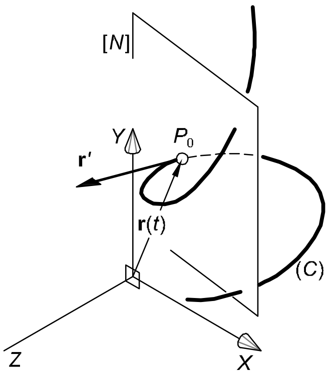


Figura 1.7a. Planul normal la o curbă în spaţiu.

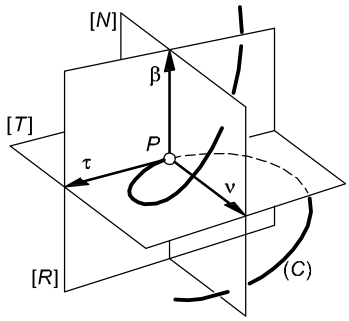


Figura 1.7b. Triedrul osculator al curbei.

Fiecare dreaptă care se află în planul normal şi trece prin P_0 este *normală* lui (C) în P_0. Normala care se află în planul osculator [T] se numeşte *normala principală* a lui (C) în punctul P_0 iar cea care se află în planul rectificant se numeşte *binormală*. Vectorii directori ai celor două normale astfel definite sunt:

- $(\mathbf{r}'\times\mathbf{r}'')\times\mathbf{r}'$, pentru normala principală
- $\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''$, pentru binormală

Dacă pentru fiecare punct al curbei (C) ducem trei vectori $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$ şi $\boldsymbol{\beta}$ de lungime unitară în direcţia tangentei, normalei principale şi binormalei, aceştia vor forma un triedru ortonormat care se numeşte *triedrul mobil osculator al curbei*, sau *triedrul lui Frenet* (figura 1.7b).

Lungimea arcului de curbă

O curbă poate fi trasată aproximativ printr-o linie poligonală compusă din segmente de dreaptă adiacente. Lungimea unei astfel de linii poligonale este egală cu suma segmentelor $\Delta\mathbf{r}$. Suma acestor segmente aproximează lungimea reală a curbei. Pentru un segment de curbă care are reprezentarea parametrică (1.2), cu parametrul t din intervalul $t_0 \le t \le t_1$, lungimea arcului de curbă corespunzător va fi dată de integrala [Enciclopedie_1980, pag. 706]:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} |\mathbf{r}'| dt \tag{1.11a}$$

unde $|\mathbf{r}'|$ este lungimea vectorului $\mathbf{r}'$ ale cărui proiecţii sunt date de relaţia (1.5).

Dacă dorim exprimarea lungimii arcului ca funcţie de parametrul t şi ca măsură a lungimii curbei între punctul care are parametrul 0 şi punctul corespunzător unui t oarecare, atunci integrala se va scrie de forma:

$$l = \int_{0}^{t} |\mathbf{r}'| dt \tag{1.11b}$$

Curbura şi torsiunea unei curbe

În evoluţia lor generală, curbele în spaţiu se curbează şi se torsionează (răsucesc). Arcul de cerc este evident o curbă plană, de curbură constantă. Prin răsucirea arcului de cerc cu o torsiune constantă, acesta devine curbă în spaţiu, de forma unei elice. În cazul general, o curbă în spaţiu prezintă *curbură* şi *torsiune* variabilă în diferite puncte ale sale. Fie ecuaţia vectorială a curbei şi derivatele sale de ordinul 1, 2 şi 3 în raport cu parametrul t, notate astfel:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t) \cdot \mathbf{i} + y(t) \cdot \mathbf{j} + z(t) \cdot \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}'(t) = x'(t) \cdot \mathbf{i} + y'(t) \cdot \mathbf{j} + z'(t) \cdot \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}'' = \mathbf{r}''(t) = x''(t) \cdot \mathbf{i} + y''(t) \cdot \mathbf{j} + z''(t) \cdot \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}''' = \mathbf{r}'''(t) = x'''(t) \cdot \mathbf{i} + y'''(t) \cdot \mathbf{j} + z'''(t) \cdot \mathbf{k}$$

Cu aceste notaţii, curbura şi torsiunea sunt date de relaţiile generale [Ionescu_1984, pag. 142-143]:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3} \tag{1.12}$$

$$\frac{1}{T} = \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2} \tag{1.13}$$

În relaţia curburii, numărătorul este dat de modulul unui produs vectorial, iar numitorul de puterea a treia a modulului vectorului $\mathbf{r}'$. În relaţia torsiunii, numărătorul este dat de produsul mixt a trei vectori, iar numitorul de pătratul modulului unui produs vectorial.

Elemente de calcul vectorial

Reamintim câteva relaţii utile aparţinând calculului vectorial. Pentru doi vectori **a** şi **b** daţi prin proiecţii, *produsul vectorial* este un vector **c** ale cărui proiecţii sunt:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

$$\begin{aligned} c_x &= a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ c_y &= a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z \\ c_z &= a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x \end{aligned} \tag{1.14}$$